УДК 539.1

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Б.А. Антуфьев, Н.М. Бугаев, А.А. Горшков

Аннотация

В геометрически нелинейной постановке решена задача определения сосредоточенной радиальной силы, действующей на тонкую пологую оболочку по заранее заданной форме ее прогиба в районе действия нагрузки. Задача сводится к нелинейным уравнениям Маргерра, описывающим деформированное состояние оболочки, и условию принудительного задания ее прогиба в районе действия искомой силы. Для решения нелинейных уравнений используется метод последовательных приближений в сочетании с методом Бубнова внутри каждой итерации. Приведено исследование сходимости решения задачи и рассмотрен ряд примеров.

Ключевые слова: принудительный локальный прогиб оболочки, нелинейное деформирование, определение радиальной силы, приближенное решение.

1. Введение

В последние годы для гашения нежелательных перемещений упругих тонкостенных конструкций летательных аппаратов (ЛА) стали применять адаптивные системы с управляемыми деформациями активных элементов. Эти элементы могут быть дискретно соединены с несущими поверхностями ЛА стержнями в ряде отдельных точек и вызывать в них поля перемещений, парирующие нежелательные деформации. При этом активный элемент создает в процессе своей работы некоторую силу, определению которой и посвящена работа. Эта проблема относится к классу обратных задач теории оболочек, в которых по заданному полю перемещений надо восстановить действующую на оболочку нагрузку.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую упругую прямоугольную в плане пологую панель оболочки неотрицательной гауссовой кривизны, отнесенную к традиционной ортогональной системе координат $Oxyz$. Пусть сосредоточенная сила, вызванная перемещениями активного элемента, действует перпендикулярно поверхности оболочки и одна из точек ее срединной поверхности с координатами $x = \xi,\ y = \eta$ получает статический умеренно конечный прогиб δ. В силу того, что жесткость оболочек в тангенциальных направлениях значительно больше, чем в радиальном, явления, связанные с ее касательными перемещениями, не будем учитывать. Тогда условия принудительного задания прогиба панели принимают вид

$$w(\xi, \eta) = \delta. \tag{1}$$

Выполнение этого условия эквивалентно действию на оболочку в этой точке заранее неизвестной сосредоточенной радиальной силы X, создаваемой активным элементом, которую и предстоит определить в ходе решения задачи. Для описания геометрически нелинейного деформирования пологой оболочки под действием силы X используем уравнения гибких пологих оболочек в смешанной форме (уравнения Маргерра) относительно ее прогиба w и функции напряжений F, принимающие в рассматриваемом случае вид

$$\frac{D}{h}\nabla^4 w - \nabla_K^2 F = \frac{X}{h}\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) + L(w,F), \tag{2}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4 F + \nabla_K^2 w = -\frac{1}{2}L(w,w).$$

Здесь $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ - цилиндрическая жесткость оболочки (все обозначения традиционные), $\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$ - дельта функция Дирака, задающая координаты точки приложения силы (точки принудительного прогиба). Линейные ∇^4, ∇_K^2 и нелинейные $L(w,F), L(w,w)$ дифференциальные операторы приведены в [1].

3. Метод решения задачи

Нелинейные дифференциальные уравнения (2) и условие (1) составляют разрешающую систему уравнений задачи относительно функций w, F и постоянной X. Для ее решения используем метод последовательных приближений, аналогичный методу дополнительных нагрузок. Суть его заключается в следующем. На первом его этапе, положив нелинейные операторы в (2) равными нулю, решаем чисто линейную задачу. Для этого представим прогиб оболочки и функцию напряжений в виде разложений

$$w = \sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} w_{mn}\phi_{mn}(x,y), \quad F = \sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} F_{mn}\psi_{mn}(x,y)\ , \tag{3}$$

где w_{mn}, F_{mn} - неизвестные коэффициенты, ϕ_{mn}, ψ_{mn} - линейно независимые координатные функции, задаваемые на площади панели S и удовлетворяющие граничным условиям на ее краях. Они могут быть одинаковыми только в том случае, если панель оболочки оперта на всех ее сторонах на гибкие нерастяжимые вдоль своей оси ребра. Подставляя разложения (3) в соотношения (1) и (2) и применяя к последним процедуру метода Бубнова, сводим задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно w_{mn}, F_{mn} и X. На втором этапе решения нелинейных уравнений (2) по (3) восстанавливаем функции w, F и подставляем их в нелинейные операторы $L(w,F)$, $L(w,w)$ и снова, применяя метод Бубнова, сводим задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Разрешающая система для $(c+1)$-го приближения имеет вид (индекс c у неизвестных для сокращения записи опущен)

$$\sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} w_{mn}a_{mn}^{rl} - \sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} F_{mn}b_{mn}^{rl} - Xd^{rl} = A^{rl},\ \left(r=\overline{1,L};\ l=\overline{1,K}\right), \tag{4}$$

$$\sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} w_{mn}f_{mn}^{rl} + \sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} F_{mn}c_{mn}^{rl} = B^{rl},\ \left(r=\overline{1,L};\ l=\overline{1,K}\right), \tag{5}$$

$$\sum_{m=1}^{L}\sum_{n=1}^{K} w_{mn}f_{mn} = \delta. \tag{6}$$

Коэффициенты, входящие в эту систему, имеют вид

$$a_{mn}^{rl} = \frac{D}{h}\iint\limits_S (\nabla^4\phi_{mn})\phi_{rl}dS, \quad b_{mn}^{rl} = \iint\limits_S (\nabla_K^2\psi_{mn})\phi_{rl}dS, \quad d^{rl} = \frac{1}{h}\ \phi_{rl}(\xi,\eta), \tag{7}$$

$$f_{mn}^{rl} = \iint\limits_S (\nabla_K^2\phi_{mn})\psi_{rl}dS, \quad c_{mn}^{rl} = \frac{1}{E}\iint\limits_S (\nabla^4\psi_{mn})\psi_{rl}dS, \qquad f_{mn} = \phi_{mn}(\xi,\eta),$$

$$A^{rl} = \iint\limits_S L(w^{(c)}, F^{(c)})\phi_{rl}dS, \quad B^{rl} = -\frac{1}{2}\iint\limits_S L(\ w^{(c)}, w^{(c)})\psi_{rl}dS,$$

где S - площадь поверхности оболочки. Процесс решения нелинейных уравнений как последовательности линейных задач продолжается до тех пор, пока решения в двух последующих приближениях не совпадут между собой с заданной степенью точности. После чего по (3) восстанавливаем w и F, а далее по соотношениям теории пологих оболочек можно определить внутренние силовые факторы, а затем и напряжения.

4. Примеры

В качестве примера рассмотрим пологие квадратные в плане со стороной $2a$ панели сферической и цилиндрической оболочек, получившие в центре ($\xi = \eta = 0$) принудительный прогиб δ. Вследствие симметрии деформирования оболочек относительно осей координат зададим в разложениях (3) функции ϕ_{mn} и ψ_{mn} в виде

$$\phi_{mn} = \psi_{mn} = \cos\frac{(m-1/2)\pi x_1}{a}\cos\frac{(n-1/2)\pi x_2}{a}. \tag{8}$$

Рассматриваемые панели характеризуются следующими параметрами: $R/h = 100$, $a/R = 0.25$, $\nu = 0.3$ (обозначения традиционные). Сходимость решения задачи будем оценивать по величине силы X. Перед решением исследуем сходимость линейной ее части по X в зависимости от числа членов ряда сохраненных в разложениях (3). Так, например, для сферической оболочки при $L \times K$ равном 5×5, 10×10, 15×15 получим безразмерную радиальную силу $X^* = XR/Eh^3$ соответственно $0.7603, 0.7355, 0.7283$. Точное решение [2] для безграничной пологой сферической оболочки под действием сосредоточенной радиальной силы дает силу $X = Eh^3/(0.413R)$. Для принятых исходных данных ее безразмерный аналог составит $X^* = 0.7264$. Основываясь на этих цифрах, при решении нелинейной задачи в рядах (3) будем удерживать 15×15 слагаемых. Число необходимых итераций для ее решения существенно зависит от степени потребной точности и величины задаваемого принудительного прогиба. Так, например, для сферы при безразмерном задаваемом перемещении равном $\delta^* = \delta/h = 0.3, 0.6, 0.9$ для получения результата с 10%-ой точностью вычислений по силе X необходимо 3, 3 и 4 приближения соответственно, а при относительной точности в 5% эти величины составят 5, 7 и 12 итераций. Для цилиндрической оболочки сходимость несколько хуже и для достижения 5%-ой точности при $\delta^* = \delta/h = 0.3, 0.6, 0.9$ нужно уже 6, 9 и 15 итераций. Число приближений для получения решения необходимой точности зависит еще и от числа членов рядов, удержанных в (3). При их увеличении сходимость вычислительного процесса падает. Работа выполнена при финансовой поддержке

гранта РФФИ 13-08-01-053А.

Summary

B.A. Antufev, N.M. Bugaev, A.A. Gorshkov Inverse problem of nonlinear deformation of a thin flat cover. In geometrically nonlinear statement the problem of determination of the concentrated radial force operating on a thin flat cover in in advance set form of its deflection around action of loading is solved. The task is reduced to the nonlinear equations of Margerr describing the deformed condition of a cover and to a condition of a compulsory task of its deflection around action of required force. For the solution of the nonlinear equations the method of consecutive approximations in combination with Bubnov's method in each iteration is used. Research of convergence of the solution of a task is given and a number of examples is considered.

Key words: compulsory local deflection of a cover, nonlinear deformation, determination of radial force, approximate decision.

Литература

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука, 1972. - 431с.
2. *Лукасевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. - М.: Мир, 1982. - 542с.

Сведения о каждом из авторов статьи
Антуфьев Борис Андреевич – д.т.н., профессор, МАИ;
Бугаев Николай Михайлович – заведующий лабораторией, МАИ;
Горшков Александр Анатольевич – к.т.н., доцент, МИТХТ;
E-mail: *tdv@mai.ru*